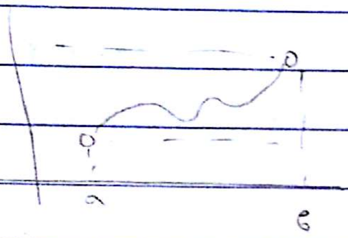
Μαθημα 3º 8/3/2017

Τοπολογια

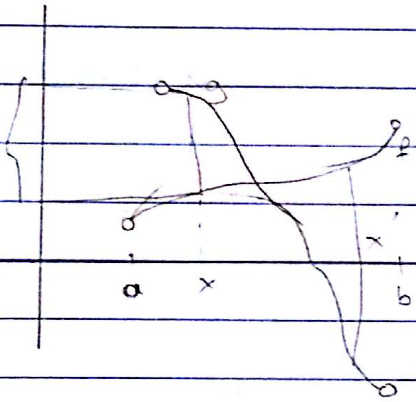
Ασκηση 1

Εστω $I=(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

$E=\{f: I \to \mathbb{R} : f$ φραγμενη$\}$, $\exists\ \rho: E\times E \to \mathbb{R}$ τ.ω (E,ρ) μ.χ



Λυση



όταν τα σταθεροποιω ειναι φραγμενα

Οριζουμε το $\rho(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\} \subset \mathbb{R}^+$

$\in \mathbb{R}^+$

↳ καλα ορισμενη + φραγμενη αρα εχει supremum

- $f(x)\leq M_1 \ \forall x\in I \ (\exists M_1>0)$
- $g(x)\leq M_2 \ \forall x\in I$ για καποιο $M_2>0$

$|f(x)-g(x)|\leq M_1+M_2$

Θελω να δειξω οτι ειναι μ.χ το (E,ρ)

① $\rho(f,g)=0 \iff f=g$

Δειχνω πρωτα την κατευθυνση $(\Leftarrow)$

$f=g$ σημαινει $f(x)=g(x)\ \forall x\in I$ τοτε $|f(x)-g(x)|=0\ \forall x\in I$

αρα $\sup\{|f(x)-g(x)| : \forall x\in I\}=\rho(f,g)=0$

$(\Rightarrow)$ Εστω $\rho(f,g)=0 \Rightarrow$ θελω νδο $f(x)=g(x)\ \forall x\in I$
Σταθεροποιω $x\in I$ τοτε
$|f(x)-g(x)| \leq \sup\{|f(y)-g(y)| : \forall y\in I\} = \rho(f,g)=0$
$\Rightarrow \forall x\in I : |f(x)-g(x)|=0 \Rightarrow f(x)=g(x)$

② $\forall f,g\in E$ ισχυει $\rho(f,g)=\rho(g,f)$
απο τον ορισμο ισχυει
$\sup\{|f(x)-g(x)| : \forall x\in I\} = \sup\{|g(x)-f(x)| : \forall x\in I\}$
το οποιο ειναι φανερο!

③ $\rho(f,g) \leq \underbrace{\overset{\in \mathbb{R}^+}{\rho(f,h)} + \overset{\in \mathbb{R}^+}{\rho(h,g)}}_{=M} \quad \forall f,g,h\in E$

Θελω νδο το M ειναι ανω φραγμα (δηλ. φραγμενη)
Αν δειξω οτι $\forall x\in I$:
$\underbrace{|f(x)-g(x)| \leq M}_{\text{Υποθετου}} \Rightarrow \rho(f,g)\leq M$

Εστω x σταθεροποιημενο και $x\in I$
$|f(x)-g(x)| = |(f(x)-h(x))+(h(x)-g(x))| \overset{\text{Τρ. Αν}}{\leq} |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq$
$\leq \rho(f,h)+\rho(h,g)=M$ αρα εχουμε το ζητουμενο

ΑΣΚΗΣΗ 2

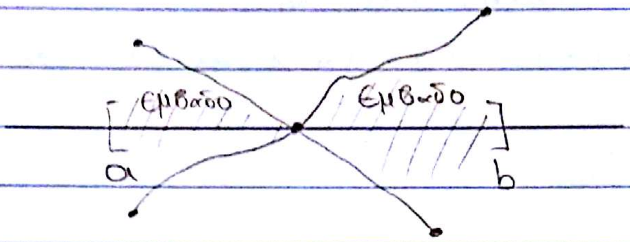
Έστω $E = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ τ.ω f συνεχής $\}$

Ορίζουμε $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ τότε $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

Να δείξετε ότι (E, ρ) μ.χ

Λύση

②



$\rho(f,g) = \rho(g,f)\ \forall f,g \in E$ είναι φανερό

{ Το ολοκλήρωμα είναι ένα εμβαδό }

③ $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,f)\ \forall f,g,h \in E$

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \int_a^b |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))|\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|\,dx = \rho(f,h) + \rho(h,g)$$ φανερά ισχύει

① $\rho(f,g) = 0 \iff f = g$

$(\Leftarrow)$ $f(x) = g(x)\ \forall x \in I$ ισχύει φανερά $\rho(f,g) = 0$

$(\Rightarrow)$ Θα δείξω ότι $\underbrace{\rho(f,g) = 0}_{①} \Rightarrow \underbrace{f = g}_{②}$ $(f(x) = g(x)\ \forall x \in I)$

Αν $f, g \in E$ συνεχείς

Έστω ότι δεν ισχύει το ② τότε $\exists\, x_0 \in I$ τ.ω $f(x_0) \neq g(x_0)$

χωρίς βλάβη της γενικότητας $f(x_0) > g(x_0)$

Έχουμε ότι $f(x_0) > g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) > 0$

Έστω ότι $h(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in I$

Ισχύει ότι $h(x_0) > 0$ με $h(x_0) = \delta$ (= Σταθερό)

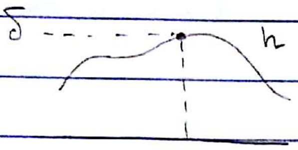
Επίσης η h συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Θα αποδείξουμε ότι $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : h(x) > \frac{\delta}{2}$

(τμήμα απειροστικού λογισμού)

$h(x_0) = \delta > 0$ h συνεχής στο x_0

$\Rightarrow$ Δείξτε ότι: $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : h(x) > \delta/2$ } (Υ)



ορισμός συνέχειας στο x_0

$\forall \varepsilon_1 > 0 \,.\, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) : |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon_1$

Πρέπει να διαλέξω ένα ε_1. Έστω $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2} > 0$

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) : |h(x) - h(x_0)| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow$

$(h(x) - h(x_0) < -(h(x) - h(x_0)) = h(x_0) - h(x) \Rightarrow$

$h(x_0) - h(x) < \frac{\delta}{2} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow h(x) > h(x_0) - \frac{\delta}{2} \Rightarrow$

$h(x) > h(x_0) - \frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$

Άρα δείξαμε ότι $\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : h(x) > \delta/2$

Στόχος μας για να τελειώσουμε την άσκηση είναι νδο:

$|f(x) - g(x)| > \frac{\delta}{2} > 0 \Rightarrow \rho(f,g) > 0$

$$\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1} |f(x) - g(x)|\, dx \geq \int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1} \frac{\delta}{2}\, dx = 2\delta_1 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta_1 \cdot \delta = \delta_2 > 0$$

και $\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1} |f(x) - g(x)|\, dx \geq \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \rho(f,g) > \delta_2 > 0$ άτοπο!

Άσκηση 3

Έστω (E,ρ) μ.χ, $A\neq\emptyset$ και $A\subseteq E$ και A φραγμένο, τότε

α) $\delta(A)\geq|\rho(x,y)-\rho(x,z)|$ $\forall x\in E$, $\forall y,z\in A$

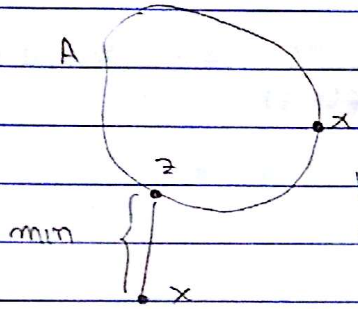
Λύση

Ισχύει η ανισότητα $|\rho(x,y)-\rho(x,z)|\le\rho(y,z)+\rho(x,x)=\rho(y,z)\le\delta(A)$
$\forall y,z\in A$

β) $\forall x\in E$, $\forall y\in A$ ισχύει $\rho(x,y)\le\rho(x,A)+\delta(A)$

Λύση

Έστω $E=\mathbb{R}^2$ Σκεπτικό



$x\in A$

με ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $x\notin A$

$\rho(x,z)=\rho(x,A)$

$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,z): z\in A\}$

$\rho(x,A)=\rho(x,z)$, $z\in A$ τότε $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\delta(A)\Rightarrow$

$\rho(x,y)-\rho(x,z)\le\delta(A)$ που ισχύει από το (α) είναι φανερό

$\rho(x,A)=\inf\{\overset{\in\mathbb{R}^+}{\rho(x,z)}: z\in A\}$

Διαλέγω τυχαίο $\varepsilon>0$ άρα $\exists z_\varepsilon\in A: \rho(x,A)\le\rho(x,z_\varepsilon)<\underbrace{\rho(x,A)+\varepsilon}_{(1)}$

$\rho(x,y)-\rho(x,A)\overset{?}{\le}\delta(A)$?

↳ $\rho(x,A)>\rho(x,z_\varepsilon)-\varepsilon$ (1)

Άρα $\rho(x,y)-\rho(x,A)\le\rho(x,y)-\rho(x,z_\varepsilon)+\varepsilon\le\rho(\overset{\in A}{y},\overset{\in A}{z_\varepsilon})+\varepsilon\le\delta(A)+\varepsilon$

$\rho(x,y)-\rho(x,A)\le\delta(A)+\varepsilon$ παίρνω $\varepsilon\to0^+$ οπότε

$\rho(x,y)-\rho(x,A)\le\delta(A)\Rightarrow\rho(x,y)\le\rho(x,A)+\delta(A)$

το ζητούμενο

Σχολια

Εχουμε τον μ.χ (E,ρ)

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $\rho(x,y) = |x-y|$

$\delta(\mathbb{R}) = +\infty$

Διακριτη μετρικη

$$\rho_\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases}$$

Θυμαμαι!

Δημιουργω μια αλλη μετρικη την

$\tau : E\times E \to \mathbb{R}^+$ με τυπο $\tau(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leq 1 \quad \forall x,y \in E$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\tau(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$x \overset{|\cdot|}{\approx} y \iff x \overset{\tau}{\approx} y$$

$$x \overset{(\mathbb{R},|\cdot|)}{\sim} y \Rightarrow x \sim y$$

Θελουμε να δειξουμε οτι η τ ειναι μετρικη

① $\tau(x,y)=0 \iff x=y$

$$\tau(x,y)=0 \iff \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \iff |x-y|=0 \iff x=y$$

αρα ισχυει

(2) $\tau(x,y)=\tau(y,x)$

$$\tau(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \tau(y,x)$$ φανερό!

(3) $\tau(x,y) \leq \tau(x,z)+\tau(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in \tilde{E}$

Παίρνω το δεύτερο μέλος

$$\tau(x,z)+\tau(z,y) = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} \geq$$

$$\geq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(y,z)+\rho(x,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)+\rho(x,z)} = \frac{(\rho(x,z)+\rho(z,y))=\sigma}{1+(\rho(y,z)+\rho(x,z))=\sigma} =$$

$$= \frac{\sigma}{1+\sigma}$$ (*) με $\sigma \neq 0$ $(\sigma>0)$ $\quad \sigma \geq \rho(x,y)$

αν $\sigma=0$ γιατί ισχύει $\Rightarrow$ Άσκηση σπίτι

(*) $\dfrac{\sigma}{1+\sigma} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sigma}+1}$ είναι αύξουσα άρα μπορώ να γράψω

$$\frac{1}{\frac{1}{\sigma}+1} \geq \frac{1}{\frac{1}{\rho(x,y)}+1} = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \tau(x,y)$$ ζητούμενο